

## ON THE STABILITY OF HIGH-ENERGY CRYSTALLINE BEAMS

Hiroshi Sugimoto<sup>1A)</sup>, Hiromi Okamoto<sup>A)</sup>, Jie Wei<sup>B)</sup>, Yosuke Yuri<sup>C)</sup>, Andrew M Sessler<sup>D)</sup>

<sup>A)</sup> Graduate School of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University

1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8530, Japan

<sup>B)</sup> Brookhaven National Laboratory

Upton, New York 11973, USA

<sup>C)</sup> Takasaki Advanced Radiation Research Institute, Japan Atomic Energy Agency

1233 Watanuki-machi, Takasaki 370-1292, Japan

<sup>D)</sup> Lawrence Berkeley National Laboratory

1 Cyclotron Road, Berkeley, California 94720, USA

### Abstract

The stability of high-energy crystalline beams has been studied systematically with analytic calculations and molecular dynamics (MD) simulations. It is confirmed that a crystalline beam becomes unstable due to lack of the effective focusing force when the Lorentz factor  $\gamma$  exceeds the horizontal betatron tune  $\nu_x$ . We also analyze the stability of one-dimensional (1D) string crystals, employing a phonon theory. Theoretical predictions are compared with results of MD simulations that assume ion beams of various line densities and kinetic energies. It is found that 1D crystals traveling in an alternating gradient channel can be stabilized in a very high energy region where  $\gamma > \nu_x$ .

## 高エネルギー結晶化ビームの安定性について

### 1. はじめに

貯蔵リング中のイオンビームを極限まで冷却するとその過程である種の相転移が発生し、最終的には個々の粒子が規則的に配列したクーロン結晶状態に至ることがわかっている[1]. クーロン結晶化したイオンビーム(クリスタルビーム)の物理的性質やその生成法に関する理論的研究は90年代半ば頃から精力的に行われており、様々な知見が得られている.

ビームを結晶化し安定に周回させるためには、少なくとも以下の条件が必要である:

1. ビームを高温領域から極低温領域に冷却する過程で、線形のコヒーレント共鳴が誘起されないよう配慮すること. この目的のため、単一ラティス構造当たりのベータatron振動の位相進みを90度未満に抑えなければならない[2].
2. 結晶構造の安定性を確保するには、ビームのエネルギー $\gamma$ がリング固有のトランジションエネルギー $\gamma_t$ 以下でなければならない[3].

結晶化したビームのエミッタンスは量子的な揺らぎを除き厳密にゼロであり[4]、高エネルギーのクリスタルビーム同士を衝突させることができれば、非常に大きなルミノシティが期待できる[5]. 本研究では、理論的手法および分子動力学シミュレーションに基づいて、高エネルギー領域におけるクリスタルビームの安定性を様々な線密度で調べた. まず、2

節でクリスタルビームの安定性に関する理論的な考察を行い、3節で分子動力学シミュレーションによる結果を示した後、理論的な予想との比較を行う.

### 2. 理論的考察

#### 2.1 要旨

貯蔵リング中を周回するビーム構成粒子の運動はビーム静止系では近似的に次のハミルトニアンに支配されている:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + \frac{1}{2} K_x(s)x^2 + \frac{1}{2} K_y(s)y^2 - \frac{\gamma}{\rho} x p_z + \frac{r_p}{\beta^2 \gamma^2} V_c(x, y, z). \quad (1.1)$$

ただし上式では、ラティス構成要素としてドリフトスペース、偏向電磁石、四極電磁石のみが想定されている.  $\beta$ および $\gamma$ は設計粒子のLorentz因子、 $\rho$ は設計軌道の曲率半径、 $r_p$ は粒子の古典半径であり、 $V_c$ は粒子間のクーロンポテンシャルに起因する項

$$V_c(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (1.2)$$

である.  $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ は現在着目している粒子とは別の粒子の位置ベクトルである. 尚、独立変数 $s$ は設計軌道に沿って測った距離を表している. 式

<sup>1</sup> E-mail: hsugimoto@hiroshima-u.ac.jp

(1.1)で外場に平滑化近似を施し、さらに結晶状態では  $dz/ds \approx 0$  であることを用いると、水平方向の運動方程式は以下のように書ける：

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{v_x^2 - \gamma^2}{R^2}x - \frac{r_p}{\beta^2\gamma^2} \frac{\partial V_c}{\partial x}. \quad (1.3)$$

ここで、 $R$ はリングの平均半径、 $v_x$ は水平方向のベータトロンチューンである。式(1.3)から、クーロン結晶を構成する個々の粒子が感じる実効的な集束力は、ビームエネルギーの増加に伴って小さくなることわかる。このように、結晶構造を維持するためには、少なくとも  $\gamma < v_x$  が満足されている必要があると予想される。

## 2.2 ひも状結晶の安定性

通常、平滑化近似を用いた解析結果と分子動力学シミュレーションの結果は概ね一致するが、ビームの安定性をより正確に予測するためには外場の時間変化を考慮しなければならない。本研究では理論的に扱いやすいひも状結晶の安定性をフォノンモデル[6]に基づいて予測した。

完全なひも状結晶状態における個々の粒子の位置座標は、 $d$ を隣接粒子間の距離として、

$$x = y = z = 0, \quad x_n = y_n = 0, \quad z_n = nd,$$

で与えられる。この座標の周りで  $\partial V_c / \partial x$ ,  $\partial V_c / \partial y$ , および  $\partial V_c / \partial z$  を二次までの展開で近似する：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_c}{\partial x} &\approx - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(x - x_n)^2}{|nd|^3} \\ \frac{\partial V_c}{\partial y} &\approx - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(y - y_n)^2}{|nd|^3} \\ \frac{\partial V_c}{\partial z} &\approx 2 \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(z - z_n)^2}{|nd|^3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

ひも状結晶が行うコヒーレントな振動の波数を  $k$  とすると、 $(x_n, y_n, z_n) = (x, y, z) \cos(knd)$  と書くことができる。これ式(1.4)に代入すると、注目している粒子の運動方程式として

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{\gamma}{\rho} \frac{dz}{ds} + \frac{\gamma^2}{\rho^2} x - (K_x - \Omega)x \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= -(K_y - \Omega)y \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= -2\Omega z - \frac{\gamma}{\rho} \frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (1.5)$$

を得る。ここで  $\Omega$  を

$$\Omega = 2 \frac{r_p}{\beta^2\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(knd)}{(nd)^3} \quad (1.6)$$

と定義した。

式(1.5)を数値的に積分し、フロケの定理からコヒーレント運動の安定性を判定する。全ての波数  $k$

に対して運動が安定であれば、ひも状結晶はリング中を安定に周回する。一例として、超周期数24、 $v_x = v_y = 5.85$  のモデルリング (図 1) に対して実際に解析を行った。図 2はその結果得られたひも状結晶の安定領域を示している。

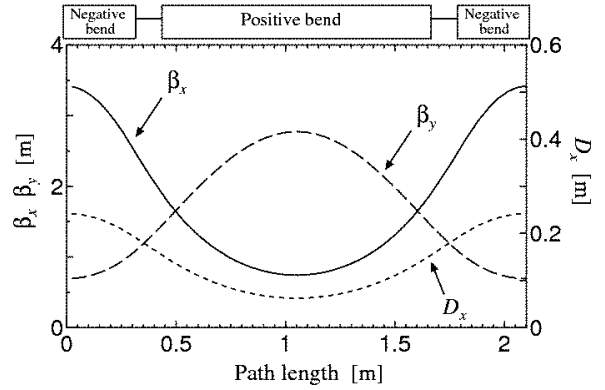


図 1 モデルリングのラティス関数。  $\gamma_t$  を大きくするためにビーム偏向角が負の双極磁石が導入してある。超周期数は24で、リング一周当たりのベータトロン振動数は  $v_x = v_y = 5.85$  に設定してある。

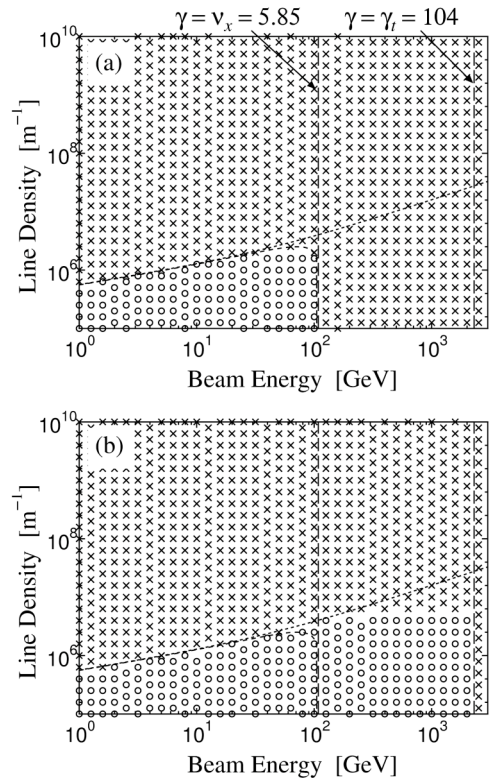


図 2 ひも状結晶の安定領域図。○は安定、×は不安定であることを表す。(a) 式(1.5)に平滑化近似を施した場合。(b) 外場の周期的変化を考慮した場合。実線はHasseらの理論[7]によるひも状結晶からジグザグ構造への転移線密度を示す。強集束系では、 $\gamma > v_x$  の領域においてもひも状結晶は安定である。

### 3. 分子動力学シミュレーション

前節で用いたモデルリングを想定し、ビームのエネルギーと線密度をパラメータとして、クリスタルビームの安定性を系統的に調べた。この目的のため、分子動力学シミュレーションコードCRYSTAL[8]を使用した。シミュレーションではまず、イオンビームを理想的な散逸力[9]で冷却してクーロン結晶化させ、その後散逸力を取り除いて、結晶構造がどの程度持続するかを確認した。図3は、様々な結晶構造をもつクリスタルビームの安定領域をプロットしたものである。○は一万ターン以上安定に周回、△は一万ターン未満で崩壊、灰色の領域は結晶化しなかった、もしくは急激に崩壊した領域を示している。

ドリフトスペース中央で観測したクリスタルビームの断面図の一例を図4に示す。水平および鉛直方向のチューンは一致しているのも関わらず、断面形状が明らかに扁平であることが見て取れる。これは、先に指摘した水平方向の実効的な集束力の減少に起因していると考えられる。実際、図3の結果から、 $\gamma$ が水平方向のチューン $\nu_x$ を超えると、高密度の結晶化ビームの安定性が急激に低下することがわかる。この事実は平滑化近似を用いた予測と合致する。一方で、外場の周期性を考慮に入れたフォノンモデルによる解析結果(図2(b))から予想されていたように、ひも状結晶は $\gamma > \nu_x$ の領域でも安定にリングを周回する。ただし、超高エネルギー領域( $\gamma \approx \gamma_t$ 、もしくは $\gamma \gg \gamma_t$ の領域)については数値積分による誤差の影響等をより正確に考慮した高精度の数値解析が必要で、現在検討中である。

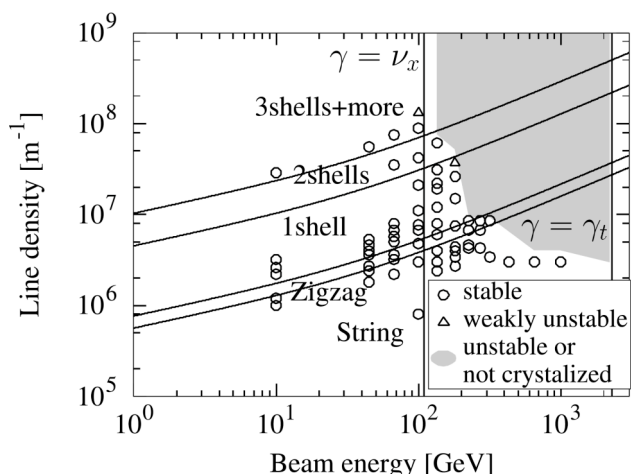


図3 分子動力学シミュレーションの結果。リングは前節のものと同じである。 $\gamma$ が $\nu_x$ を超えると線密度の高い多次元クーロン結晶は不安定になる。

### 4. まとめ

高エネルギークリスタルビームの安定性に関し、現在までに得られている知見について報告した。理論的考察および多粒子シミュレーションにより、運動エネルギーの増加に伴って水平方向の実効的なビーム集束力が弱まっていくことを確認した；比較的高密度のクリスタルビームを安定に維持するためには条件 $\gamma < \nu_x$ が満たされている必要がある。一方、線形コヒーレント共鳴によるビームの不安定化を避けるため、単一ラティス構造当たりのベータatron振動の位相の進みは90度以下に抑えなければならない。これらの事実から、高エネルギークリスタルビームの生成にはラティス超周期数の大きな貯蔵リングが必要であると結論できる。ただし、フォノンモデル解析と分子動力学シミュレーションの結果によれば、ひも状結晶は $\gamma \gg \nu_x$ の場合も非常に安定である。超高エネルギー領域におけるひも状結晶の安定性については更なる理論的考察が必要である。

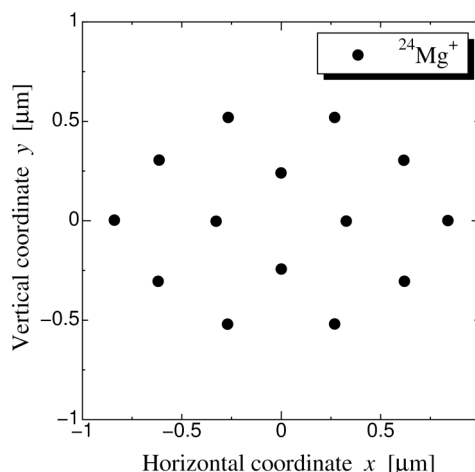


図4 イオンの実空間粒子分布。ビームエネルギーは67GeV、線密度は $3.5 \times 10^7$  [m<sup>-1</sup>]。

### 参考文献

- [1] J. Wei, X.-P. Li and A.M. Sessler, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3089.
- [2] K. Okabe, H. Okamoto, Jpn. J. Appl. Phys. **42** (2003) 4584.
- [3] J. Wei, H. Okamoto and A. M. Sessler, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 2606.
- [4] H. Okamoto, Phys. Plasmas **9** (2002) 322.
- [5] J. Wei, A.M. Sessler, EPAC (1998) 862.
- [6] X.-P. Li, H. Enokizono, H. Okamoto, Y. Yuri, A.M. Sessler and J. Wei, Phys. Rev. ST Accel. Beams **9** (2006) 034201.
- [7] R. Hasse and J. Schiffer, Ann. Phys. **203**, 419 (1990).
- [8] Y. Yuri and H. Okamoto, Phys. Rev. ST Accel. Beams **8**, 114201 (2005).
- [9] H. Okamoto, J. Wei, Phys. Rev. E **58** (1998) 3817.