Proceedings of the 2nd Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 30th Linear Accelerator Meeting in Japan (July 20 - 22, 2005, Tosu Japan)

FURTHER PROGRESS IN NONLINEAR ACCELARATION THEORY FOR CYCLOTRONS

Kenji Sato[1,A)], Shiro Ninomiya[A)], Nobumasa Miyawaki[B)], Mitsuhiro Fukuda[B)], Shuji Obata[C)]

[A)] Research Center for Nuclear Physics, Osaka Univ., Mihogaoka 10-1, Ibaraki, Osaka 567-0047, JAPAN

[B)]Advanced Radiation Technology Center, JAERI, Watanuki-cho 1233, Takasaki , Gunma 370-1291, JAPAN

[C)] School of Science and Engineering, Tokyo Denki Univ., Ishizaka, Hatoyama-cho, Hiki, Saitama 350-0311, JAPAN

Abstract: It is possible to transform three equations of motion into a convenient form which is expressed by terms up to 2nd differential of variables of the Lorentz factor and angular velocity by the use of a field index of magnetic field distribution. The expression plays a vital role in a two-step nonlinear acceleration theory of spiral orbital motions in cyclotrons because this one and only equation of motion refers to both longitudinal motion and transverse motion.

サイクロトロンの非線形加速理論の新たな展開

１．はじめに

サイクロトロンの二段階構成の非線形加速理論の第一段階では、渦巻き状軌道を描きながら加速されて行くときの特殊な運動を仮想的な基準の運動として想定し、仮想的な基準としての高周波加速電圧の周波数と振幅を与え、特殊な運動を実現出来る仮想的な基準としての磁場分布を求める。第二段階では、磁場分布と加速電圧の周波数と振幅が仮想的な基準からずれているとして、任意の粒子の運動を、仮想的な基準の運動からのずれとして、縦方向ずれ運動と横方向ずれ運動とに分離して求める。このとき、縦方向ずれ運動はエネルギーのずれの非線形関数として求め、これより、サイクロトロンでの加速運動の全てを知ることが出来るようになる。この枠組みは、著者の一人（K.S.）による、日本加速器学会誌「加速器」第一巻第二号の解説[1]と同じである。

ところで、縦方向ずれ運動では、エネルギーと角速度と位相と動径の四つの変量がゆっくりと円滑に低速で変化するのに対して、横方向ずれ運動では、角速度と位相と動径の三つの変量が忙しく高速で変化し、エネルギーは縦方向ずれ運動で定まる低速の変化のみとする。このような分離が出来る理由は、横方向ずれ運動では位相が忙しく高速で変化し、加速や減速が繰り返されるので、高速で相殺され、エネルギーは変化しないと考えて良いからである。

ところで、縦方向ずれ運動は、例えば、シンクロトロン振動と言う加速理論に代表されるように、エネルギーと位相の二つの変量のみからなる連立の微分方程式の解として与えられる。このとき、横方向ずれ運動では位相が忙しく高速で変化することに着目すると、その運動方程式は、エネルギーと位相の二つの変量と、特に、位相の高階微分を含む形になると考えられる。従って、縦方向ずれ運動も横方向ずれ運動も、二つの運動に共通な一つの運動方程式の解になるべきであると考えられる。

簡単のため、円柱座標系で、磁場は動径のみの関数とし、波乗り加速であると言うモデルと仮定を採用し、元々の運動方程式を、全く近似することなく、変形し整理したところ、エネルギーに等価なローレンツ因子と、位相の変化率に等価な角速度の二つの変量、及び、これらの高階微分のみを含む運動方程式が、厳密なものとして、今回、新たに求まった。

この点、「加速器」第一巻第二号[1]では、動径とその高階微分からなる運動方程式を取り扱い、その結果、ローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分からなる運動方程式は、近似を多用して得られている。そのため、近似の是非など、筆者自身（K.S.）も混乱していたが、今回の新たな展開は簡明であり、理解し易く、混乱の少ないものになった。

しかし、第一段階と第二段階との全てを解き切るには、なおも、一つ、式が足りないことが判明した。上に求めたローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分からなる運動方程式には磁場分布が含まれており、元々、動径のみの関数である磁場分布を、これらの変量で記述する必要があった。この問題は、動径の関数である磁場分布のフィールド・インデックスが定数であるとすることにより解決出来た。その結果、新たな解法と、動径の運動を出発点とした以前の解法との接点が明らかになったと言える。

さて、渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く場合、粒子は、加速間隙を、斜めに、その電場の方向とは異なる方向に横切る。このとき、加速に寄与しない方向の電場は、粒子を水平面内でキックし、これは、磁場が粒子を偏向させるのと同じ効果である。このように、粒子の偏向は磁場と電場の二つの効果で定まり、前以って一方を既知の量として与えることが出来ない。こうした不定要因があっても、運動方程式の形式として、両者の効果を含む実効的磁場分布を定義してやれば良いことが分かった。

この論文では、以上に述べた手順を示す。

[1] E-mail: sato@rcnp.osaka-u.ac.jp

２．元々の運動方程式

独立変数を回転数とするときの運動方程式は、「加速器」第一巻第二号[1]と同じく五つとする。

$$\dot{\theta}=\frac{\omega_{rf}}{h}\frac{1}{1+\frac{1}{2\pi h}\phi'} \tag{1}$$

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}V\cos\phi \tag{2}$$

$$\dot{\theta}=c\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4\pi^2}r'^2}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\gamma r\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma' r'\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r''\dot{\theta}-\frac{1}{4\pi^2}\gamma r'\dot{\theta}'\\&=-\frac{q}{m_0\dot{\theta}}E_r+r\omega_B\end{aligned} \tag{4}$$

$$2\gamma r'\dot{\theta}+\gamma' r\dot{\theta}+\gamma r\dot{\theta}'=\frac{2\pi q}{m_0\dot{\theta}}E_\theta+r'\omega_B \tag{5}$$

知りたい変量は$\dot{\theta}$、ϕ、γ、rの四つなので、解くべき式も四つで良く、(4)式を捨てることにする。

ここで、加速は電場で行われることを示すため、(4)式$\times r'-$(5)式$\times r$を計算し、ω_Bの項を消去する。

$$\gamma'=\frac{q}{m_0c^2}\left(r'E_r+2\pi rE_\theta\right) \tag{6}$$

３．接線方向の電場及び法線方向の電場

粒子の進行方向である接線方向の電場をE_tとし、進行方向に垂直な法線方向の電場をE_nとする。これらの電場と、動径方向の電場と方位角方向との電場との間には、以下の関係が成立する。ただし、sは粒子の進行方向の距離であり、s'はsの回転数による微分である。なお、$\dot{s}$は進行方向の速度である。

$$E_r=r'\frac{E_t}{s'}+2\pi r\frac{E_n}{s'} \tag{7}$$

$$E_\theta=2\pi r\frac{E_t}{s'}-r'\frac{E_n}{s'} \tag{8}$$

これらの式を(6)式に代入すると、接線方向の電場が、(2)式で与えられているγ'で定まる。

$$\frac{q}{m_0\dot{\theta}}\frac{E_t}{s'}=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}} \tag{9}$$

当然のこととは言え、法線方向の電場を直接決める式がないことが分かる。

４．実効的磁場分布

法線方向の電場は磁場と同じく偏向の効果を持つので、その効果が入った実効的磁場分布を定義する。

$$\omega_B^{eff}=\omega_B-\frac{q}{m_0\dot{\theta}}\frac{E_n}{s'} \tag{10}$$

(5)式の方位角方向の運動方程式に(9)式と(10)式を代入すると、実効的磁場分布を含む式を得る。

$$2\gamma r'\dot{\theta}-\gamma' r\dot{\theta}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-1\right)+\gamma r\dot{\theta}'=r'\omega_B^{eff} \tag{11}$$

この(11)式で、r'がrに比例する形に書けるので、(3)式と連立させると、rとr'のそれぞれが求まる。

$$r=\frac{c}{\dot{\theta}}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)^2}\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)^2}} \tag{12}$$

$$r'=\frac{c}{\dot{\theta}}\frac{\frac{1}{2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}}\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)^2}\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)^2}} \tag{13}$$

５．加速間隙での電場の向きの影響

加速間隙での電場の向きを係数αで表す。

$$E_{gapr}=\alpha E_{gap\theta} \tag{14}$$

この向きと、(7)式と(8)式の左辺にある、動径方向と方位角方向の電場の向きとが一致するとする。

$$E_r=\alpha E_\theta \tag{15}$$

この(15)式から(7)式と(8)式との関係が定まり、(12)式のrと(13)式のr'を代入すると、接線方向の電場と実効的磁場分布と裸の磁場分布の関係を得る。

$$\begin{aligned}&2\pi\frac{q}{m_0\dot{\theta}}\frac{E_n}{s'}=\omega_B-\omega_B^{eff}=\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}\frac{\alpha 2\pi\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)-\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)}{2\pi\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)+\alpha\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)}\end{aligned} \tag{16}$$

６．新たな運動方程式

(12)式の r を微分すると(13)式の r' となるから、実効的磁場分布の微分 $\omega_B^{eff\,\prime}$ を含む運動方程式を得る。

$$\frac{4\pi^2}{\gamma\dot{\theta}}\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)^3-4\pi^2\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)^2 +\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2+\dfrac{1}{\gamma^2}}{\gamma^3\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)^2}\gamma'^2\dot{\theta}+\dfrac{1-4\dfrac{1}{\gamma^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\gamma'\dot{\theta}' \\ +\dfrac{\gamma\dot{\theta}'^2}{\dot{\theta}}-\dfrac{\gamma''\dot{\theta}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)}+\gamma\dot{\theta}''\end{array}\right\}\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right) +\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)\left(\frac{2-3\dfrac{1}{\gamma^2}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\gamma'\dot{\theta}+3\gamma\dot{\theta}'-\omega_B^{eff\,\prime}\right)=0 \tag{17}$$

この式を(1)式及び(2)式と連立させて解けば良いが、そのためには、実効的磁場分布の微分 $\omega_B^{eff\,\prime}$ をローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分で与える必要があり、次章で、それを示す。ところで、特殊な運動を想定すれば、この式単独で、仮想的な基準となる磁場分布を求めるための一階常微分方程式が得られる。また、γ と $\dot{\theta}$ の項のみを拾い上げれば、縦方向ずれ運動の式の一つとなる。また、この式には $\dot{\theta}''$ が含まれているので、γ の値を固定すると、この式単独で、横方向ずれ運動の式となる。

７．実効的磁場分布の微分

７．１　フィールド・インデックス

実効的磁場分布の微分は、(16)式を微分して求めれば良いが、そのためには、裸の磁場分布の微分 $\omega_B{}'$ を知る必要がある。そこで、フィールド・インデックスを利用することにする。

$$K_B=-\frac{r}{\omega_B(r)}\frac{d\omega_B(r)}{dr} \tag{18}$$

このフィールド・インデックスを用いると、裸の磁場分布の微分の式を得る。

$$\omega_B{}'=r'\frac{d\omega_B}{dr}=-\frac{r'}{r}K_B\omega_B \tag{19}$$

この $\dfrac{r'}{r}$ は、(12)式と(13)式より、ローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分と実効的磁場分布とで書き表され、また、裸の磁場分布 ω_B も、(16)式より同様であり、それらを上の式に代入する。

$$\omega_B{}'=-K_B\left(\frac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)\frac{1}{2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}} \times\left\{\begin{array}{l}2\gamma\dot{\theta}-\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right) \\ +\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\dfrac{\alpha 2\pi\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)-\left(\dfrac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\dfrac{1}{\gamma}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)}{2\pi\left(2\gamma\dot{\theta}-\omega_B^{eff}\right)+\alpha\left(\dfrac{\gamma'\dot{\theta}}{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}-\gamma'\dot{\theta}-\gamma\dot{\theta}'\right)}\end{array}\right\} \tag{20}$$

この式を用いて実効的磁場分布の微分を求めるには、(16)式の右辺の二つの式を微分すれば良い。しかし、その式はかなり長いので、ここでは割愛する。

７．２　実効的磁場分布の微分の別種の表現

(16)式の微分からして、$\omega_B^{eff\,\prime}$ は γ'' や $\dot{\theta}''$ に比例する項を含んでいる。従って、実効的磁場分布は

$$\omega_B^{eff}=\omega_B^{eff}\left(\gamma,\dot{\theta},\gamma',\dot{\theta}'\right) \tag{21}$$

と書けるとして良いであろう。これを微分して

$$\omega_B^{eff\,\prime}=\gamma'\frac{\partial\omega_B^{eff}}{\partial\gamma}+\dot{\theta}'\frac{\partial\omega_B^{eff}}{\partial\dot{\theta}}+\gamma''\frac{\partial\omega_B^{eff}}{\partial\gamma'}+\dot{\theta}''\frac{\partial\omega_B^{eff}}{\partial\dot{\theta}'} \tag{22}$$

と言う式を得る。この式は第一段階で使用する。

８．まとめ

ローレンツ因子と角速度、及び、これらの高階微分のみで表された運動方程式として、(17)式が求まった。その式に現われる実効的磁場分布の微分は、(22)式で与えるか、または、(16)式の微分で求まり、そのとき、裸の磁場分布の微分はフィールド・インデックスを一定として、(20)式で与えられることを示した。いずれの式も、モデルと仮定とを必要とするが、近似のない厳密なものである。この解を用いて、(12)式より動径を計算すれば、渦巻き状軌道を描きながら加速されて行く運動を知ることが出来る。

なお、第一段階で、実効的磁場分布を求めるための、ローレンツ因子を独立変数とする、独立変数が陽に現われる、一階非線形常微分方程式は、「加速器」第一巻第二号[1]に示したものと同じ形になる。

参考文献

[1] 佐藤健次．サイクロトロンにおけるシンクロトロン振動 - サイクロトロンの非線形加速理論 - . 日本加速器学会誌「加速器」Vol.1, No.2, 2004　(79-97).