MAGNETIC FIELD ANALYSIS BY USING 2ND-ORDER ELEMENTS

Shogo Miyata*, Shinji Endo, Takuya Natsui, Masashi Yamamoto
Akita National College of Technology
1-1, Bunkyo-cho, Iijima, Akita, 011-8511 Japan

Abstract

We are developing a code for analyzing static magnetic fields in magnets with cylindrical symmetry. The developing code uses finite element method technique with 2nd-order elements. To confirm accuracy of developing code, we compared calculation results with that of POISSON. As a result, both magnetic field distributions agree within 2%. In this paper, we will present current status and point out the remaining problems.

二次要素を使った磁場解析プログラム

1． はじめに

我々は、加速器の設計に使うプログラムを開発している [1]。これには、静電磁場や高周波の電磁場を解析するプログラムが含まれる。ここで述べるのは、そのうちの一つ、静磁場の解析プログラムについてである。

加速器には、様々な電磁石が使われており、その設計にはシミュレーションプログラムが駆使される。一般に電磁石は三次元構造をしており、三次元解析が多く使われている。しかし、対称性を考慮して二次元問題として取り扱い可能なものもかなりある。このことから、今後も二次元解析が用いられると考えられる。そこで、我々も二次元の磁場解析プログラムを開発することにした。

二次元問題ではメッシュは三角形要素に分割することができる。一次要素では誤差が大きいので、我々は、二次要素を用いた二次元の高精度の磁場解析プログラムの開発を進めている。磁場解析は有限要素法で行い、その連立方程式の解法には SOR 法を用いた。二次元磁場解析にしばしば用いられる POISSON [2] は一次要素を用いているが、我々が作成したプログラムは二次要素を用いているので、より精度が高いと考えている。二次元の二次要素を使った磁場解析のためのプログラムを作成したので、現状と今後の開発課題を報告する。

2． 有限要素法

2.1　メッシュ生成

磁場解析は二次要素を用いた有限要素法により行った。一次要素では三角形頂点の三点の値を用い、要素内の任意の場所のベクトルポテンシャルを記述することになる。これは一次近似である。この場合、精度を向上させるためには更に細かいメッシュが必要である。一方、二次要素では三角形要素の頂点に加え、辺の中点も合わせた計六点で要素内を近似するので、同じ計算量であれば一次要素に比べ、計算精度が良い。

我々が作成したメッシュ作成プログラム [3] では、三角形の要素と節点の情報をファイルに出力する。出力される三角形要素の情報は、その要素番号、節点の番号、隣接する要素の番号、さらに領域である。一方、節点の情報は節点の番号、座標、境界条件である。これらを用いて離散化されたマクスウェルの方程式を計算することになる。

2.2　有限要素法

加速器で使われる磁石には軸対称構造のものも多い。この軸対称三次元問題は、対称性により二次元問題として取り扱える。軸対称問題を取り扱うので、円柱座標系で記述する。電流は θ 方向のみとし、磁場は r、z 方向である。これにより、ベクトルポテンシャルを θ 方向のみにとることができる。この θ 方向のベクトルポテンシャル A_θ を計算し、その回転を計算することにより、磁場が求められる。我々が計算した磁場の汎関数は以下のとおりである。

$$F[A_\theta] = \iint \left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\mu}\frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{A_\theta}{r}\right)^2 - j_\theta A_\theta \right] 2\pi r dr dz \quad (1)$$

この式を離散化し、停留値を計算することにより、各節点でのベクトルポテンシャルが求まる。

ベクトルポテンシャルから、磁場は以下の式を用いて計算する。

$$\nabla \times A = \left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) r + \left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right) z \quad (2)$$

* E-mail: s16010@cc.akita-nct.jp

実際のプログラムでは、この式を離散化したものを計算している。

2.3　数値計算の方法

連立方程式の計算には様々な反復法、例えばヤコビ法、ガウス・ザイデル法、SOR 法が用いられる。我々のプログラムでは収束が比較的速い SOR 法を用い、計算時間の短縮を図った。計算するマトリクスは 0 を多く含むスパースマトリクスである。計算量の低減とメモリの節約のために 0 の要素は、メモリーに格納しないように、プログラムを工夫した。

実際のプログラムでは、積分領域や形状関数が複雑となるため、図 1、図 2 のように三角形要素に対して座標変換を行い簡単化した。これで、領域が単純になり、積分等の計算が容易になる。

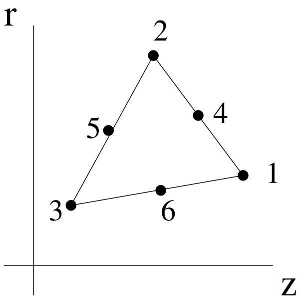

図 1: 座標変換前

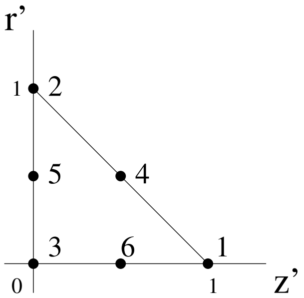

図 2: 座標変換後

3．　POISSON との比較

作成したプログラムの計算精度を検証する必要がある。しかし、我々のプログラムで境界条件が設定できる適当な解析解をもつモデルがない。そこで、磁場解析ソフトである POISSON と比較することにした。比較には図 3 のようなモデルを用いた。この領域に対してメッシュ分割を行うと図 4 のようになる。ここではメッシュが分割されているのを目視できるように、実際の分割よりもメッシュを粗くしている。

電流が流れる所は図の正方形の部分で、磁性体はそれを囲んでいる部分とした。完全軸対称である。計算領域は z が 10.0、r が 5.0 とし、全体で三角形要素数が 4218、節点数が 8587 に分割した。

ここでは z 軸をディレクレ条件とし、磁性体の比透磁率を 5000、その他の比透磁率を 1、電流密度を 1、と条件を設定した。

このモデルでの計算時間は 30sec 程度であった。ここで、CPU は Pentium4 の 2.8GHz を使用した。図 5 に計算結果を示す。透磁率が高いため磁力線が閉じこめられている。図 6 に r=0.5 のラインの Bz、Br を POISSON の結果とともに示す。図から、POISSON と我々のプログラムの計算結果がよく一致していることがわかる。 図 7 と図 8 は POISSON と作成したプログラムの磁場の差を示している。図から読みとれるように両端では差が大きい。また、r 方向の磁場については z が 5.0 のときにも差が大きい。この部分は磁場が非常に小さいため、差の割合が大きくなるからである。実質的な差は約 2% である。この差の原因は、現段階では不明である。そこで、今後は誤差が何によるものであるのかを検証していきたいと考えている。

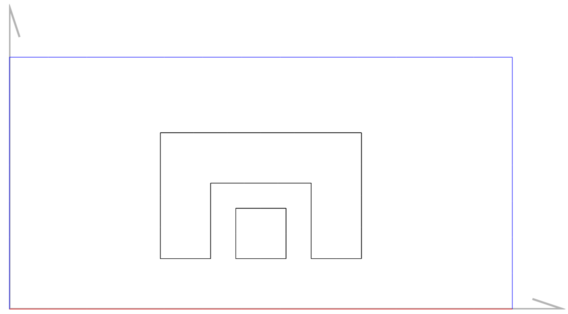

図 3: 計算領域

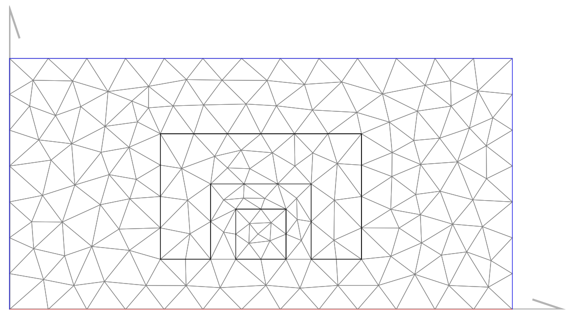

図 4: メッシュ作成

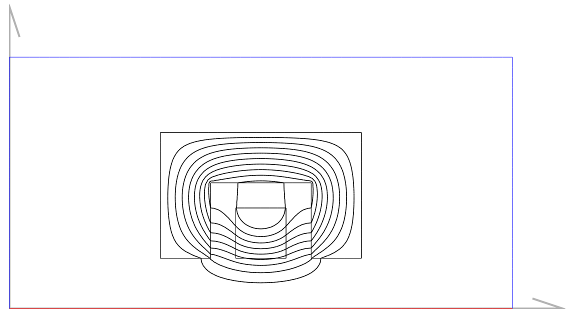

図 5: 計算結果

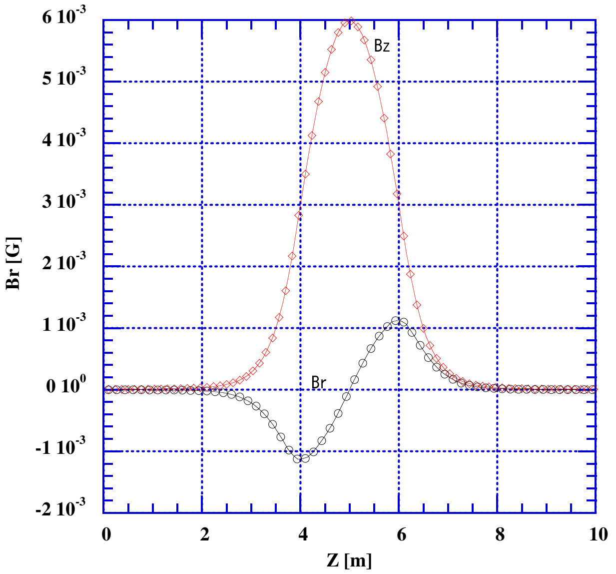

図 6: POISSON との比較結果 (r=0.5)。実線が POISSON で丸とダイヤモンドが我々のプログラムの計算結果である。

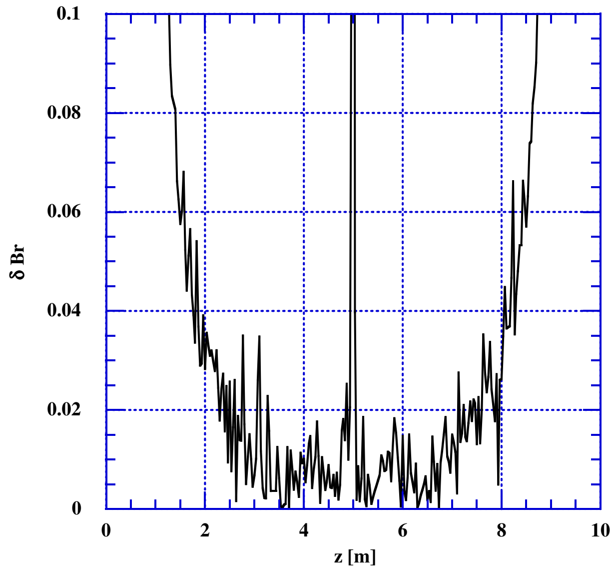

図 8: POISSON との Br の差。δBr は｜POISSON の結果ー我々のプログラム｜／POISSON の結果としている。

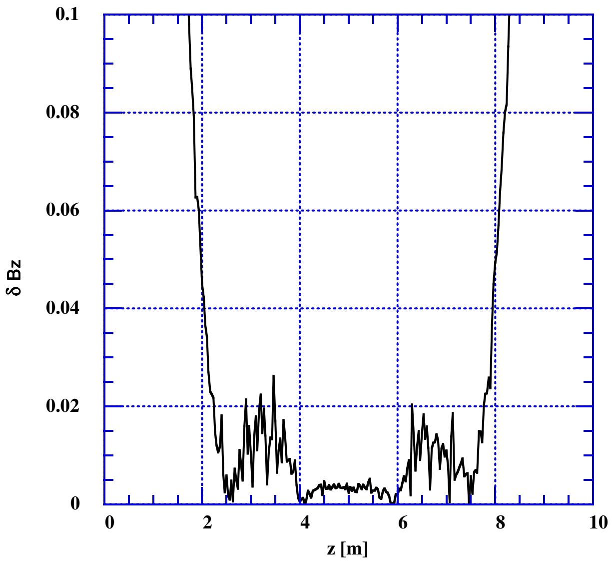

図 7: POISSON との Bz の差。δBz は｜POISSON の結果ー我々のプログラム｜／POISSON の結果としている。

4．まとめ

我々は三角形要素の二次要素を用いた有限要素法により、軸対称構造の磁場解析プログラムを作成した。メッシュ作成プログラムにより、任意の形状を要素分割することで、どのような形状でも解析が可能である。一次要素では一次近似となるため、同じ計算量であれば計算精度の良い二次要素を用いて、誤差が少なくなるようにした。連立方程式を解く方法には他の反復法に比べ収束が速い SOR 法を用い、マトリクスのスパース性を利用して、使用メモリを少なくし、かつ計算時間が短縮されるようにプログラムを作成した。今回、用いたモデルではメッシュ作成プログラムにより、計算領域全体で三角形要素数が 4218、節点数が 8587 に分割された。この磁場解析には CPU が Pentium4(2.8GHz) のパソコンを用い、30sec 程度要した。次に、作成したプログラムと POISSON の結果を比較した。これにより、POISSON との磁場の差が r 方向、z 方向ともに 2% であることがわかった。この差については早急に原因を追及する。

5．今後の課題

現在は三角形要素を直線要素によってのみ近似しているので、計算領域が曲面になってしまうと誤差が大きい。これを改善するために、曲線要素を用いて、計算精度を上げることを考える。

今回の計算では、我々が作成したプログラムと POISSON の結果を比べると、完全に一致しているとは言いがたい。この原因についても研究を進める。

また、強磁性体ではヒステリシスが存在し、それも取り扱いたい。これを考慮に入れ、実際の磁場解析に利用できるようにする。

参考文献

[1] M.Yamamoto, et.al., "DEVELOPMENT OF 2D ELECTROMAGNETIC FIELD SOLVER", this meeting

[2] J.H.Billen, et al., "POISSON/SUPERFISH on PC Compatibles" Proc. of the 1993 Particle Accelerator Conf., Vol. 2.

[3] 谷口建男, "FEM のための要素自動分割", 森北出版株式会社, 2002.