

# 共振器モデルによるコヒーレント放射の解釈 UNDERSTANDING OF COHERENT RADIATION MECHANISMS BY A CAVITY EXCITATION MODEL

本田洋介 \*A)

Yosuke Honda\*<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup>High Energy Accelerator Research Organization

## Abstract

Excitation of a cavity mode by a relativistic charged particle beam can be calculated by integrating the field of the mode along the beam trajectory. The method can be applied for calculating radiation in a free space by considering the limit of moving the cavity boundary to infinite distance. We give two examples, transition radiation from a metal target and vortex radiation from a helical undulator.

## 1. はじめに

相対論的電子ビームからは、様々な放射が発生する。例えば、シンクロトロン放射である。これは、ビーム(荷電粒子)が磁場により曲げられる際、その横方向の加速運動により双極子放射が発生し、それがローレンツブーストして観測される、と説明される。通常は、電磁気学の教科書にあるように、ビームの軌道に沿って遅延ポテンシャルの計算を行なうことで、任意の位置において観測される電磁波を求めることができる。

一方、加速器の教科書では、RF 空洞にビームが通過する際に、ビームによって空洞に励起される電磁波が議論される。この場合は、まず空洞の固有モードを決め、ビーム軌道に沿ってその電場を積分する。その固有モードにたいしてビームがする仕事が計算でき、空洞に励起される電磁波が得られる。

これらは、ビームが放射すると見るか、あるいは、電磁波が励起されると見るか、の違いであって、基本的には同じ現象のはずである。モード励起の考え方は、とくに、系の対称性によりモードが制限される場合や、興味あるモードがあらかじめ決まっている場合は、電場の空間的形状を想像することで、放射が起こるかを判断でき、計算の見通しが良い。

モード励起の考え方で、自由空間への放射を計算できることを2つの例によって示す。RF 空洞のように、境界条件が閉じていて離散的な固有モードがある状況とは異なる。しかし、光子を調和振動子の励起状態として扱うのが、場の考え方である。自由空間も、様々な固有モードが連続に分布しているだけで、RF 空洞の場合と違いは無い。

## 2. 遷移放射

Figure 1 に示すレイアウトで、完全導体平面にビームが突き抜ける場合に、前方に放射される電磁波を計算する。遷移放射と呼ばれるもので、放射の角分布は

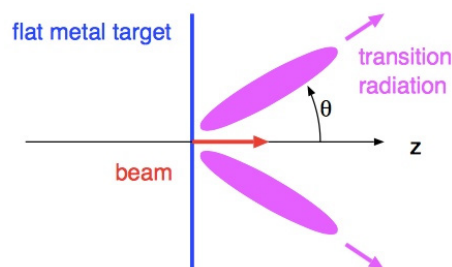


Figure 1: Layout of transition radiation.

Ginzburg-Frank の式

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \quad (1)$$

で記述されることは良く知られている。1/γ の角分布のドーナツ型の強度分布である。

これを、モード励起の手法で再現する。系の円筒対称性のため、励起されるモードは円筒対称なものに制限されることは明らかである。ひとまず便宜的に、Fig. 2 に示すように、距離 L の位置にも導体境界があり、空洞を構成している状況を考える。空洞のモードと、ビームによる励起を計算できる [1]。そのうえで、L → ∞ とすることにより、自由空間の状況に戻ることができる。

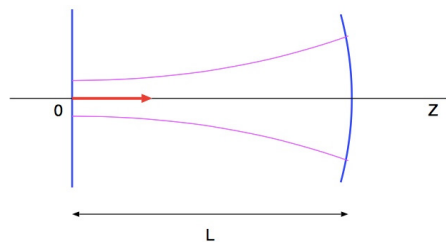


Figure 2: Cavity to be considered.

ここでは電磁波モードは近軸近似で考える。ビームによって励起されるのは、z 方向に電場成分を持つモードのみであるから励起される最低次のモードは 1 次であ

\* yosuke@post.kek.jp

る。簡単のため、 $x$  偏光成分の  $\text{TEM}_{10}$  モードのみを考える。一般にはより高次のモードも考える必要がある。(対称性より、 $y = 0$  平面上の計算を行えば十分である。)

このモードの電場は、

$$E_{10}^x = \frac{A}{w(z)} \frac{x}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)}\right) \exp[i(\omega t - kz + 2\zeta(z))] \quad (2)$$

ここで、

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (3)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2} \quad (4)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0) \quad (5)$$

である。このとき  $z$  方向の電場は、

$$ikE^z = \frac{\partial E^x}{\partial x} \quad (6)$$

より、

$$E_{10}^z = -\frac{i}{k} \frac{A}{w^2(z)} \left(1 - \frac{2x^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp[i(\omega t - kz + 2\zeta(z))] \quad (7)$$

となる。速度  $\beta c$  で中心軸上を通過するビームは、 $\omega t - kz = k(1/\beta - 1)z + \text{const.}$  であるから、

$$E_{10}^z = \frac{A}{2z_0(1 + (z/z_0)^2)} \exp\left[i\left(\frac{k}{2\gamma^2}z + 2 \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)\right] \quad (8)$$

をビームは感じる。

モードの励起エネルギーは、

$$U_{exc} = \frac{q^2}{4U} \left| \int E_{10}^z dz \right|^2 \quad (9)$$

で計算できる。ここで、 $U$  はモードの全エネルギー

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |E_{10}^x|^2 dV \quad (10)$$

である。

便宜上の空洞を考えると、ある一つのモードの励起強度は  $L$  に依存する結果になる。励起パワーが  $L \rightarrow \infty$  で定値になることを考察する。長さ  $L$  の空洞の縦モード間隔は、

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c}{L} \quad (11)$$

であるから、モードの密度はその逆数である。角振動数あたりの励起エネルギー  $dU/d\omega$  は、モード密度とあるモードの励起の大きさの積なので、上の計算をあらわに書くと、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\omega} &= \frac{L}{2\pi c} \times \frac{q^2}{\epsilon_0 \pi L} \left| \int_0^L \frac{1}{z_0(1 + (z/z_0)^2)} \right. \\ &\quad \left. \exp\left[i\left(\frac{k}{2\gamma^2}z + 2 \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)\right] dz \right|^2 \quad (12) \\ &\sim \left| \int_s^\infty \frac{1}{1+p^2} \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{\gamma}p + 2 \tan^{-1}(p)\right)\right] dp \right|^2 \end{aligned}$$

ここで、 $p = z/z_0$ 、 $\alpha = \pi z_0/\lambda$  とおいた。 $z$  方向にウェストのずれたモードも考慮すべきなので、積分の始点は一般に  $s$  とおいた。 $s$  についても積分する必要がある。

同じ  $\text{TEM}_{10}$  モードでも、任意のレイリー長  $z_0$  のモードがあるので、これをさらに  $z_0$  について積分する必要がある。(積分は適切な重み付けが必要である。)

位相因子のついた積分なので、位相が大きく回ってしまうと、積分に効かなくなる。位相第1項は、ビームが光速度より遅いため位相が遅れてしまう効果である。位相第2項は、モードの発散によって位相がずれてしまう効果である。これらが同等になる条件が、 $z_0$  の上限を与える。このことから、 $\sim 1/\gamma$  の角分布の特性が得られる。

このような計算を、より高次の  $\text{TEM}_{l,m}$  モードに一般化すると、結局、次の積分の計算に帰着することが分かる。

$$P_{l,m} = \int_s^\infty \frac{1}{1+p^2} \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{\gamma}p + (l+m+1) \tan^{-1}(p)\right)\right] dp \quad (13)$$

この  $p$  に関する積分が  $0 \rightarrow \infty$  でどのように足し合わされ、定値に収束するかを計算した一例を Fig. 3 に示す。ビームエネルギー  $\gamma$  と、モードのレイリー長に対応する  $\alpha$  を決めると、そのモードがどれだけの強さで励起されるかが分かる。 $\alpha$  が大きくなるに従って、収束値が小さくなり、放射に効かなくなることが分かり、 $\alpha$  についての総和が角分布を表す。

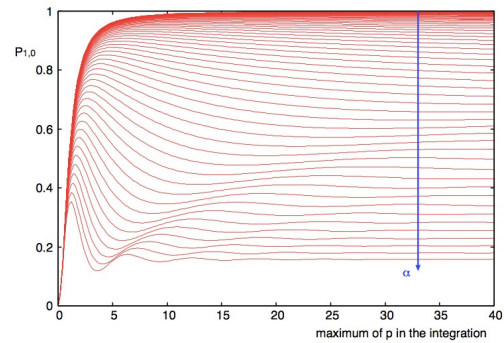


Figure 3: Integration along the beam trajectory.

また、モードのウェスト位置の依存性をみるために、積分の始点  $s$  を変えてビーム軌道に沿った積分の発展を1次モードについて計算した一例を Fig. 4 に示す。標的位置にウェストが一致する場合の寄与が最も大きく、ずれに応じて寄与が減少する様子が分かる。

横モードの次数に依存して位相の変化が異なり、積分の収束値が異なる。Figure 5 に、モード次数  $(l+m)$  を変えて積分を行なった例を示す。最も寄与が大きいのは1次モードで、 $\alpha = 0$  の場合は  $4n - 1$  次はゼロになる。また、モード次数が上がるにつれて寄与は減少する。

この計算を、あらゆるレイリー長  $\alpha$  について、あらゆるモード  $l, m$  について、あらゆる始点  $s$  について、行い総和をとると、遷移放射の電磁波が得られる。角分布を計算した結果を Fig. 6 に示す。角分布は概ね G-F の式と一致した。数値計算上、あらゆる、というのはどこかで打ち切らざるを得ない。ずれば、このためのと思われる。

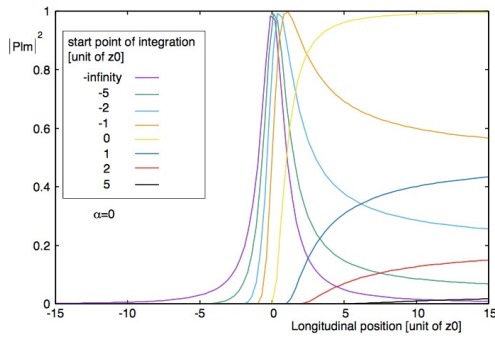


Figure 4: Excitation strength depending on the waist position.

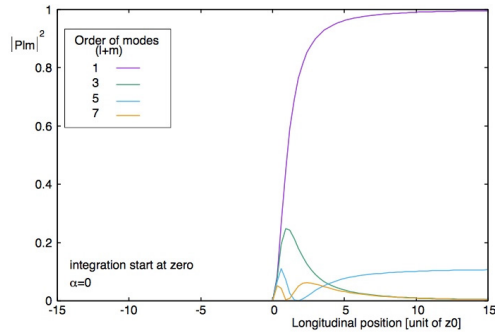


Figure 5: Excitation strength depending on the mode order.

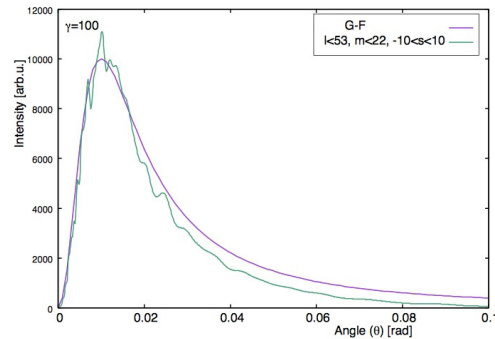


Figure 6: Calculation of angular distribution.

### 3. 光渦

この手法を応用して、ヘリカルアンジュレータから光渦が放射されることも簡単に理解できる。

ヘリカルアンジュレータのビーム軌道を円筒座標系  $(r, \phi, z)$  で記述すると、

$$r = \frac{K}{\gamma k_u \beta_z} \equiv \rho \quad (14)$$

$$\phi = k_u z \quad (15)$$

$$z = ct \left(1 - \frac{1 + K^2}{2\gamma^2}\right) \quad (16)$$

速度は、

$$\beta_r = 0 \quad (17)$$

$$\beta_\phi = \frac{K}{\gamma} \quad (18)$$

$$\beta_z = 1 - \frac{1 + K^2}{2\gamma^2} \quad (19)$$

と書ける。 $\gamma$  はローレンツ因子、 $k_u = 2\pi/\lambda_u$ 、 $\lambda_u$  はアンジュレータの周期長である。 $K$  はアンジュレータの  $K$  値である。つまり、一定の半径  $\rho$  で螺旋運動する。

ラゲールガウシアンビームとして知られる近軸波動方程式の解の振幅は、以下のように書かれる。(波面の曲がりの因子は無視した。) モードの次数を  $(p, l)$  次と表す。径方向の位相因子  $\exp(il\phi)$  があるのが特徴で、1 光子あたり  $1 \hbar$  の軌道角運動量を持つことが知られている。

$$u(r, \phi, z) \sim \frac{A}{w(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp(i\phi) \exp[i(2p + |l| + 1)\zeta(z)] \quad (20)$$

$L_p^{|l|}$  は、ラゲール陪多項式である。ここで、 $z_0, w(z), \zeta(z)$  は前節と同じである。

簡単のため、ここでは  $p = 0, l = -1$  のモードを扱うことにする。

$$u(r, \phi, z) \sim A \left(\frac{r}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(-i\phi) \exp[i2\zeta(z)] \quad (21)$$

と書ける。

円偏光とし、このモードの  $\phi$  方向の電場を円筒座標系で書くと次のようになる。

$$E^\phi = A \left(\frac{r}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(-i2\phi) \cdot \exp[i2\zeta(z)] \exp(i(\omega t - kz)) \quad (22)$$

ビームとモードの結合の計算で求める積分は、

$$\int \beta_\phi E^\phi dz = \frac{AK\rho}{\gamma} \int \frac{1}{w^2(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp[i(-2k_u z + kz(1 - \beta_z) + 2\zeta(z))] dz \quad (23)$$

である。この積分が有意に大きくなるためには、 $z$  に従って位相が回らない条件でなければならない。 $\zeta$  の  $z$  依存性をひとまず無視すると、

$$-2k_u + k(1 - \beta_z) = 0 \quad (24)$$

より、

$$\lambda = \frac{1}{2} \lambda_u \frac{1 + K^2}{2\gamma^2} \quad (25)$$

が得られる。つまり、ヘリカルアンジュレータの 2 次光の共鳴で、角運動量  $1 \hbar$  の光渦が出る、という結果が得られる。

積分が常に足し合わせに働く、つまり、モードに共鳴することは、Fig. 7 に示すように  $z$  方向のビーム運動に乗った系で、ビーム軌道と光渦モードの電場の空間的重なりを描いてみれば理解できる。今、2 次光を考えているので、ビームの円運動 1 周期の間に電場は 2 周期変化する。確かに、どの時点においてもビーム進行方向と電場方向が合っており、積分が足し合わされることが分かる。

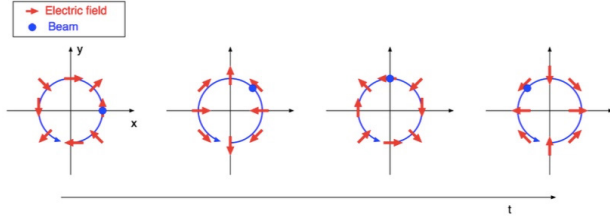


Figure 7: Field of vortex mode and the beam motion.

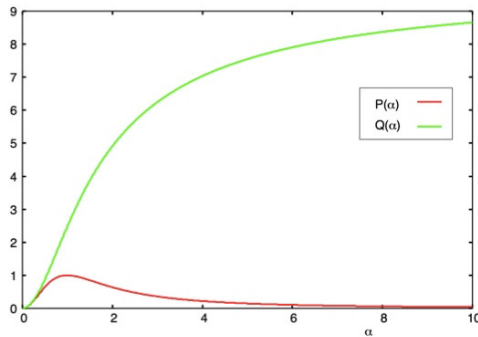


Figure 8: Functions representing excitation strength.

この共鳴条件のもとで、アンジュレータの長さを  $L$  とし、積分を具体的に書く。 $\rho \ll w$  の近似をすると、

$$\int \beta_\phi E^\phi dz = \frac{AK\rho}{\gamma} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\exp[i2\zeta(z)]}{w^2(z)} dz \quad (26)$$

$$= \frac{AK\rho}{\gamma\lambda} \int_{-\frac{L}{2z_0}}^{\frac{L}{2z_0}} \frac{\exp[i2 \tan^{-1}(p)]}{1+p^2} dp \quad (27)$$

となる。ここで、 $p = z/z_0$  とおいた。励起の大きさは、次の積分の計算に帰着する。

$$P(\alpha) = \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{1+p^2} \exp[i2 \tan^{-1}(p)] dp \right|^2 \quad (28)$$

これは、前節で扱った遷移放射で登場した表式と全く同じである。高次モード放射として共通した特性があることが分かる。この関数  $P(\alpha)$  は、Fig. 8 に示すように、 $\alpha = 1$  で最大となり、 $\alpha \rightarrow 0$  および  $\alpha \rightarrow \infty$  でゼロになる。 $z_0 \sim L/2$  のモードで放射される、つまり、レイリー長がアンジュレータ長程度となることが分かる。

比較のため、光渦ではない、通常のガウスモードの場合も計算する。 $p = 0, l = 0$  の場合である。振幅は

$$u(r, \phi, z) \sim \frac{A}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp[i\zeta(z)] \quad (29)$$

で、 $\phi$  方向の電場を円筒座標系で書くと

$$E^\phi = \frac{A}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(-i\phi) \cdot \exp[i\zeta(z)] \exp(i(\omega t - kz)) \quad (30)$$

ビームとモードの結合の計算で求める積分は、

$$\int \beta_\phi E^\phi dz = \frac{AK}{\gamma} \int \frac{1}{w(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp[i(-k_u z + kz(1 - \beta_z) + \zeta(z))] dz \quad (31)$$

今度は、位相が回らない条件から、

$$\lambda = \lambda_u \frac{1 + K^2}{2\gamma^2} \quad (32)$$

が得られ、ヘリカルアンジュレータの基本光でガウスモードが出ることが分かる。また、同様の計算で、励起の大きさは、次の積分の計算に帰着することが分かる。

$$Q(\alpha) = \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \exp[i \tan^{-1}(p)] dp \right|^2 \quad (33)$$

Figure 8 には  $Q(\alpha)$  も示した。

ビーム軌道とガウスモードの電場の空間的重なりは Fig. 9 のように理解できる。確かに 1 次光が共鳴することが分かる。

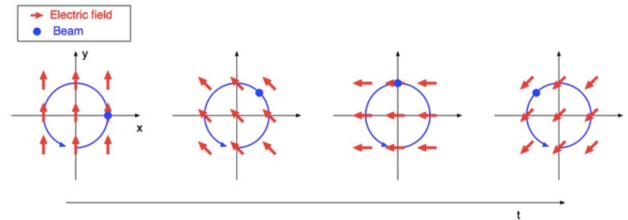


Figure 9: Field of gauss mode and the beam motion.

#### 4. まとめ

ビームの通過による空洞の電磁波モードの励起の考え方を拡張して、自由空間での放射を理解することができる。問題によっては見通しが良く、理解の助けになる。

#### 謝辞

本研究は JSPS 科研費 16H05991 および 18H03473 の助成を受けたものです。

#### 参考文献

- [1] Y. Honda *et al.*, “cERL における共振器型 CDR による THz 光源の検討”, 第 12 回加速器学会年会, 敦賀 (2015), WEP022.